



XXI ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ



ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД, 2014 год

XXI Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап, Великий Новгород, 2014 г. Условия и решения задач. Под редакцией А.С. Расторгуева, О.С. Угольникова, А.М. Татарникова, Е.Н. Фадеева. 36 стр.

Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.

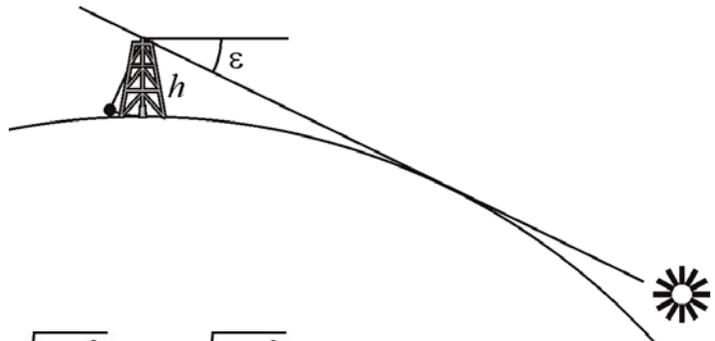
XI. 1 ГИГАНТСКИЙ МАЯТНИК

О.С. Угольников

? На северном полюсе далекой сферической планеты установили гигантский маятник Фуко. При наблюдении из точки подвеса маятника местное Солнце всегда было над горизонтом, касаясь его лишь раз в году. Груз маятника располагался вблизи поверхности планеты, а период колебаний составил 10 земных минут. Найдите среднюю плотность планеты. Наклон экватора планеты к плоскости ее орбиты вдвое меньше, чем у Земли. Атмосферными эффектами и угловыми размерами звезды пренебречь.

! Маятник находится на полюсе, и наименьшая высота центральной звезды достигается в день зимнего солнцестояния. Тогда оно находится глубже математического горизонта на угол ε , равный наклону экватора к плоскости орбиты планеты. По условию задачи, он вдвое меньше земного и равен 11.7° или 0.2 радиан. В этот момент касательные лучи освещают точку подвеса маятника. Высота подвеса составляет

$$h = R \cdot \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} - 1 \right) \approx \frac{R\varepsilon^2}{2}.$$



Здесь R – радиус планеты, мы также учли, что угол ε невелик. Груз маятника колеблется у поверхности, и период будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{hR^2}{GM}} = \pi\varepsilon \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}.$$

Средняя плотность планеты равна

$$\rho = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R^3} = \frac{3\pi\varepsilon^2}{2GT^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

XI. 2 НЕБО СКОПЛЕНИЯ

О.С. Угольников

? На ясном дневном небе Земли можно с трудом увидеть Венеру, находящуюся в наибольшей элонгации от Солнца. Сколько звезд было бы видно на дневном небе Земли, находишь Солнце внутри шарового скопления радиусом 10 пк, состоящего из миллиона таких же, как Солнце, звезд, равномерно распределенных по объему скопления? Считать яркость фона неба одинаковой по всем направлениям.

! Определим концентрацию звезд в шаровом скоплении:

$$n = \frac{3N}{4\pi R^3} = 240 \text{ пк}^{-3}.$$

Найдем далее расстояние, с которого звезда солнечного типа (абсолютная звездная величина M равна +4.7) будет выглядеть как Венера в наибольшей элонгации (видимая звездная величина m равна -4.4):

$$\lg r = 1 + \frac{m - M}{5} = -0.82.$$

Соответствующее расстояние составляет 0.15 пк. Рассчитаем среднее количество звезд внутри полусферы с таким радиусом:

$$N_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 n = \frac{N}{2} \cdot \frac{r^3}{R^3} \sim 2.$$

К этому числу можно добавить еще единицу, соответствующую самому Солнцу, видимому на дневном небе Земли. В любом случае, на небе планеты, находящейся в шаровом скоплении, днем было бы видно лишь несколько звезд.

XI. 3 ПЫЛЕВАЯ ОБОЛОЧКА

А.М. Татарников

? Вокруг звезды спектрального класса G2V на расстоянии 0.3 а.е. имеется пылевая оболочка толщиной 0.01 а.е. с концентрацией частиц 0.002 см^{-3} . Определите светимость и массу оболочки. Пылинки считать абсолютно черными телами радиусом 0.1 мкм, волновыми эффектами пренебречь.

! Вначале определим, какая часть излучения звезды будет задерживаться пылью. Для этого рассмотрим цилиндр с площадью основания S и высотой, равной толщине оболочки l . Число пылинок, попадающих в этот цилиндр, составит

$$N_S = S l n,$$

где n – концентрация пылинок. Если число пылинок невелико, и при наблюдении изнутри они не накладываются друг на друга, то их суммарная площадь на пути распространения света будет равна

$$\sigma = N_S \pi r^2,$$

где r – радиус пылинки. Среднее число пылинок на луче зрения от звезды:

$$N = \frac{\sigma}{S} = l \cdot n \cdot \pi r^2 = 0.1.$$

Это число невелико, и эффект видимого наложения пылинок друг на друга можно не учитывать. Так как пылинки черные, они будут поглощать все падающее на них излучение звезды, нагреваться и излучать в инфракрасном диапазоне. Свети-

мость оболочки составит 0.1 от светимости звезды, которая, как можно видеть по ее спектральному классу, похожа на Солнце. В итоге, светимость оболочки равна $4 \cdot 10^{25}$ Вт. Масса оболочки составляет

$$M = 4\pi R^2 l \cdot n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho = \frac{16}{3} \pi^2 R^2 r^3 l \cdot n \rho.$$

Здесь ρ – плотность пылинок, которую можно принять равной 1 г/см^3 . Итоговое значение массы: $3 \cdot 10^{17}$ кг.

XI. 4 ОСТЫВАЮЩИЙ КАРЛИК

О.С. Угольников

? Белый карлик имеет массу, равную массе Солнца, и радиус, равный радиусу Земли. Температура его поверхности равна 10 000 кельвин, температура недр – 10 млн кельвин. Оцените время, которое этот объект будет выглядеть как белый карлик, т.е. излучать энергию в видимом диапазоне, до превращения в черный карлик. Считать для простоты, что теплоемкость вещества белого карлика соответствует теплоемкости идеального газа.

! Белый карлик, за исключением тонкого внешнего слоя, состоит из очень горячего вырожденного газа. Основу химического состава его недр представляет полностью ионизованный гелий-4 или более тяжелые ядра. Для гелия на 4 нуклона (протона или нейтрона) приходится три частицы – сам ион гелия и два электрона. Если считать, что теплоемкость вещества такая же, как и у идеального газа, то тепловой запас энергии белого карлика составит

$$E = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} kT_0 \cdot N \approx \frac{kT_0 M}{m}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, M и T_0 – масса и температура недр белого карлика, N – число нуклонов, m – масса протона (или нейтрона, разница в данной задаче несущественна). Данное выражение в целом справедливо и для углеродных белых карликов, в которых число частиц на один нуклон вместо $3/4$ составляет $7/12$, для кислорода – $9/16$. Светимость белого карлика равна

$$J = 4\pi\sigma R^2 T^4.$$

Здесь σ – постоянная Стефана-Больцмана, R – радиус белого карлика, T – температура его поверхности. С течением времени тепловой запас и светимость белого карлика будут уменьшаться, характерное время его угасания можно определить простым образом:

$$t = \frac{E}{J} = \frac{kT_0 M}{4\pi\sigma m R^2 T^4}.$$

Это время равно $6 \cdot 10^{17}$ секунд или 20 миллиардов лет. Запасов тепловой энергии белому карлику хватит на время, превышающее возраст Вселенной.

XI. 5

ДВА ЗАТМЕНИЯ ПОДРЯД

О.С. Угольников

? На какое минимальное расстояние по поверхности Земли должен переместиться наблюдатель, чтобы иметь возможность увидеть два частных солнечных затмения, разделенных интервалом в один лунный месяц? Орбиты Земли и Луны считать круговыми.

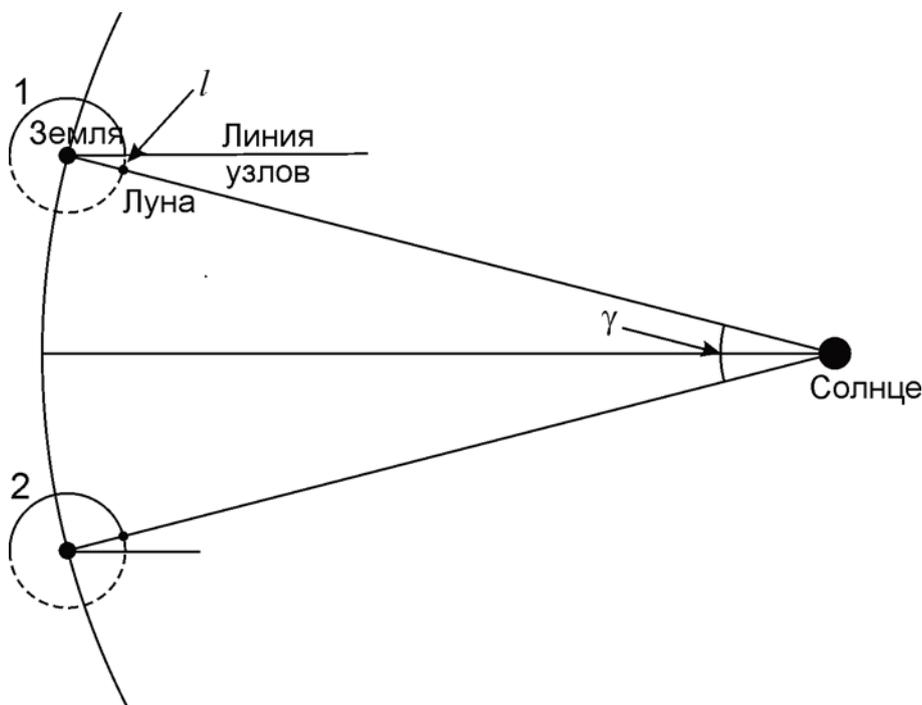
! Как известно, два солнечных затмения могут происходить с интервалом в один лунный месяц, если линия узлов орбиты Луны совпадет с линией Земля-Солнце посередине между этими новолуниями. В подавляющем большинстве случаев (а в модели круговых орбит Земли и Луны – всегда) эти затмения будут частными. Во время одного новолуния Луна будет располагаться севернее плоскости эклиптики, а во время другого – южнее плоскости эклиптики, поэтому затмения будут наблюдаться в разных полушариях Земли. В этой задаче нам нужно найти минимально возможное расстояние между областями видимости этих явлений.

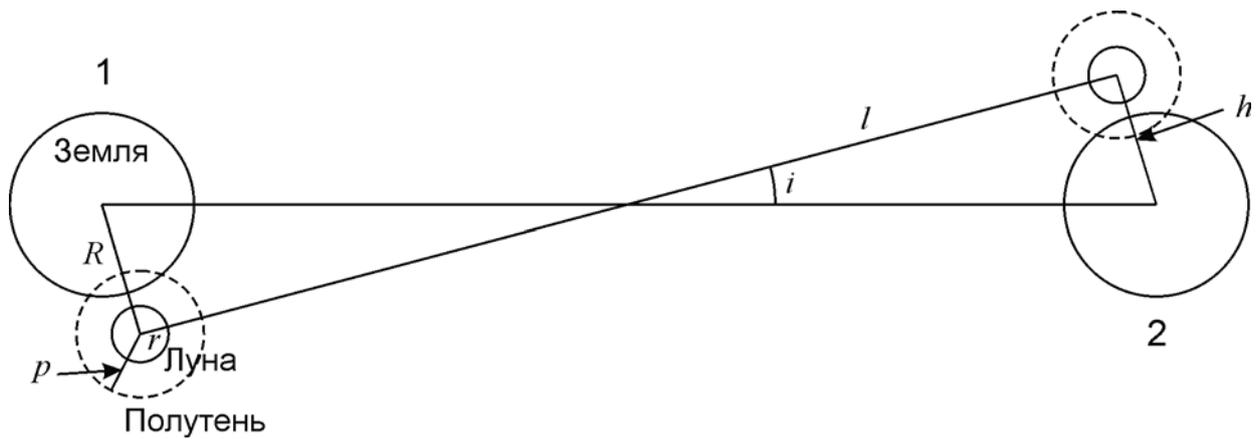
Синодический период Луны S составляет 29.53 дня. За это время Земля проходит в своем орбитальном движении дугу γ , равную 29.1° . Пусть положения Луны в оба новолуния симметричны относительно линии узлов, и во время этих новолуний Луна отстояла от линии узлов на угол $\gamma/2$. Пространственное расстояние от узла будет равно

$$l = L\gamma / 2 = 97.6 \text{ тыс. км.}$$

Здесь мы учли, что угол $\gamma/2$ невелик, L – радиус орбиты Луны.

Рассмотрим картину со стороны Солнца и учтем, что оно значительно дальше от Земли, нежели Луна. Минимальное расстояние между проекциями центров Земли и Луны составит





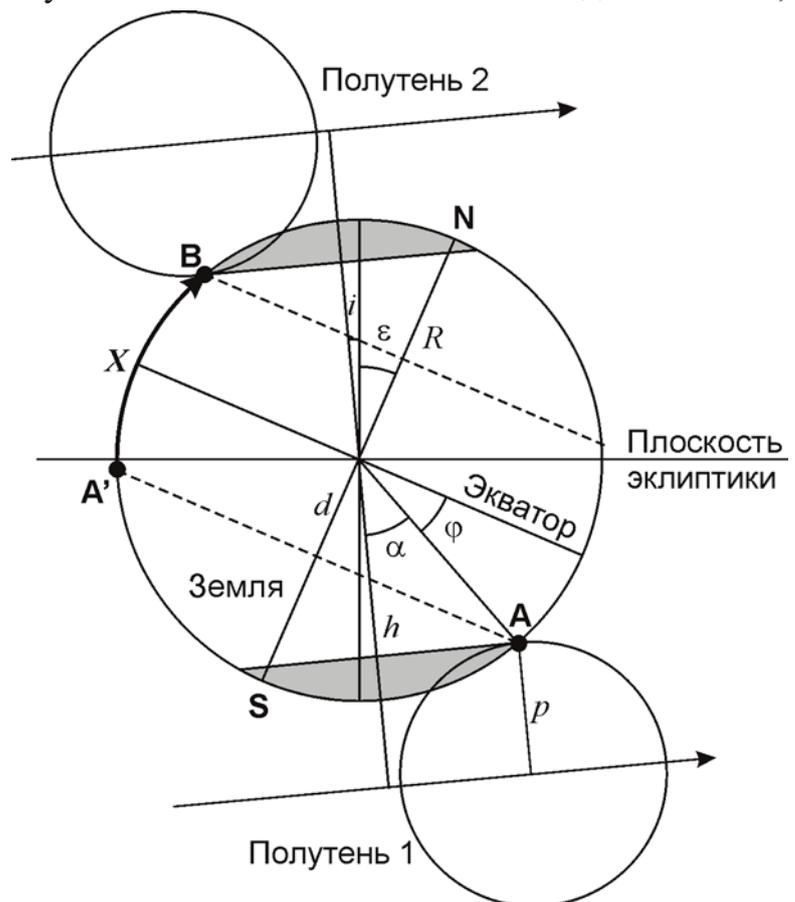
$$h = L \cdot i = L \cdot i \cdot \gamma / 2 = 8760 \text{ км.}$$

Это расстояние больше радиуса Земли, поэтому центральные солнечные затмения в такой конфигурации не наблюдаются. Но частные происходят, в чем можно убедиться, рассчитав радиус лунной полутени p (рисунок справа):

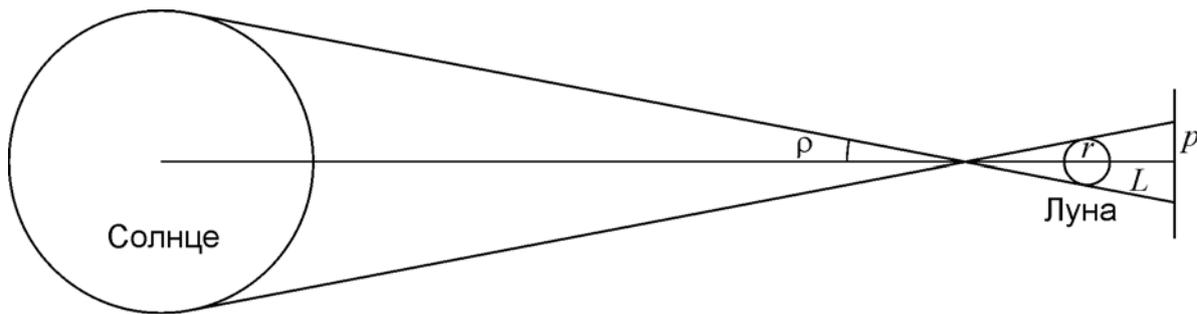
$$p = r + L\rho = 3500 \text{ км} \sim 2r.$$

Здесь ρ – угловой радиус Солнца. Мы вновь учли, что расстояние до Солнца велико. Угловые радиусы Солнца и Луны в небе Земли можно считать одинаковыми, и $L\rho \approx r$.

Изобразим Землю и две проекции полутени в более крупном масштабе. Обратим внимание, что области видимости обоих затмений (выделены серым цветом) могут смещаться ближе к экватору за счет наклона самого экватора и лунной орбиты к плоскости эклиптике. Эффект будет максимальным, если оба фактора сложатся друг с другом. Это будет иметь место вблизи весеннего равноденствия у восходящего узла орбиты Луны (на рисунке) или вблизи осеннего равноденствия у нисходящего узла орбиты Луны. Найдем минимальную (по модулю) широту точки наблюдения затмений:



$$\varphi = 90^\circ - \alpha - \varepsilon - i = 90^\circ - \arccos \frac{h-p}{R} - \varepsilon - i = 27.1^\circ.$$



По прошествии лунного месяца точка наблюдения первого затмения **A** может оказаться на другой стороне терминатора Земли за счет ее вращения – вспомним, что синодический период Луны близок к полуцелому числу суток. Наблюдателю достаточно будет преодолеть путь **X** вдоль меридиана из точки **A'** в точку **B**. Это соответствует дуге 2φ , длина пути составит 6000 км.

Ситуация, близкая к описанной в этой задаче, случится 13 июля и 11 августа 2018 года. Области видимости частных солнечных затмений будут разделены расстоянием около 6500 км.

XI. 6 КАТАЛОГ ЭЙТКЕНА

О.С. Угольников

? При составлении своего классического каталога двойных звезд американский астроном Роберт Грант Эйткен стремился отсеять оптические пары (звезды, не связанные друг с другом в пространстве), накладывая на двойные звезды ограничение:

$$\lg \rho < 2.8 - 0.2m.$$

Здесь ρ – угловое расстояние между компонентами в угловых секундах, а m – звездная величина более яркой из звезд. Оцените количество оптических двойных звезд с обеими компонентами ярче 6^m , которые все же могли попасть в каталог Эйткена. Считать, что 6000 звезд ярче 6^m распределены по небу случайным образом, а число звезд с видимой яркостью более J пропорционально $J^{-3/2}$.

! По заданной формуле мы видим, что в каталог могли попасть звездные пары с угловым расстоянием меньше заданного, причем требование тем жестче, чем слабее звезда. Это имеет логическое объяснение: более яркие звезды, скорее всего, ближе, и там физические двойные звезды могут быть видны под большими углами.

Пусть некоторая звезда имеет блеск m . Рассчитаем вероятность случайного появления другой звезды ярче 6^m на угловом расстоянии, не большим ρ'' . Последняя величина определяется формулой, заданной в условии. Определим, какую часть небесной сферы занимает окружность с радиусом ρ'' :

$$\sigma = \frac{\pi \cdot (\rho / 206265)^2}{4\pi} = \frac{\rho^2}{1.7 \cdot 10^{11}}.$$

Звезд ярче 6^m на небе 6000, и вероятность составляет

$$p = 6000 \cdot \sigma = \frac{\rho^2}{2.8 \cdot 10^7}.$$

Разделим все звезды на 6 групп по звездным величинам (ярче 1^m , от 1^m до 2^m и т.д., от 5^m до 6^m). Число звезд ярче 6^m на небе 6000, число звезд ярче 5^m (N_0) по условию задачи в $2.512^{1.5}$, то есть в 4 раза меньше и равно 1500. Звезд от 5^m до 6^m на небе около 4500. Аналогичным образом, мы можем рассчитать количество звезд N в каждой группе.

Предельная величина	N_0	m_{av}	N	$\lg \rho$	ρ''	p	$N \cdot p$
1	6	0.5	6	2.7	501	0.008971	0.054
2	23	1.5	18	2.5	316	0.003571	0.063
3	94	2.5	70	2.3	200	0.001422	0.100
4	375	3.5	281	2.1	126	0.000566	0.159
5	1500	4.5	1125	1.9	79	0.000225	0.254
6	6000	5.5	4500	1.7	50	0.000090	0.404

Будем считать, что средняя величина m_{av} звезд каждой группы равна среднему между максимумом и минимумом (0.5^m для группы самых ярких звезд, 1.5^m , 2.5^m и т.д.). Исходя из этого, рассчитаем величину ρ и вероятность случайного обнаружения другой звезды p для этих групп. Произведение числа звезд и вероятности $N \cdot p$ есть среднее число оптических звезд в каталоге Эйкена, соответствующее каждой группе (отметим, что небольшое количество ярких пар может быть учтено дважды). Данные произведения также приведены в таблице. Проведя суммирование произведений для всех групп, получаем общее вероятное число оптических двойных ярче 6^m в каталоге Эйткена, оно равно 1.

Полученный ответ показывает обоснованность критерия, введенного при составлении каталога. Более жесткие требования будут лишь исключать из каталога физические двойные звезды, а смягчение критерия резко увеличит число оптических двойных. Нужно также учесть, что реальное число оптических двойных в каталоге Эйткена может быть больше вследствие неравномерности распределения звезд на небе с повышенной плотностью вблизи Млечного Пути.

XI. 2

ПЛАНЕТНАЯ ФОТОМЕТРИЯ

О.С. Угольников

? В таблице приведены результаты измерения яркости некоторых звезд и планет в относительных единицах в полосе V на разных зенитных расстояниях в течение одной ночи со стабильной ясной погодой. Звездные величины этих звезд по каталогу также приведены в таблице. Исходя из нее, определите величину атмосферного ослабления света в зените. Какой (в используемых единицах) была бы яркость звезды 0^m при отсутствии атмосферного ослабления? Определите по этим данным звездные величины Венеры и Юпитера также при отсутствии атмосферного ослабления.

! Как известно, при стабильных атмосферных условиях звездная величина некоторой звезды при зенитном расстоянии z вдали от горизонта составляет

$$m = m_0 + E \sec z.$$

Здесь m_0 – внеатмосферная (истинная) звездная величина этой звезды, а E – вертикальное поглощение света в зените в звездных величинах. Применяя формулу Погсона для величины m , получаем:

$$-2.5 \lg (J / J_0) - m_0 = E \sec z.$$

Здесь J – измеренная яркость звезды, а J_0 – яркость звезды 0^m без атмосферного поглощения в тех же единицах. Перепишем эту формулу:

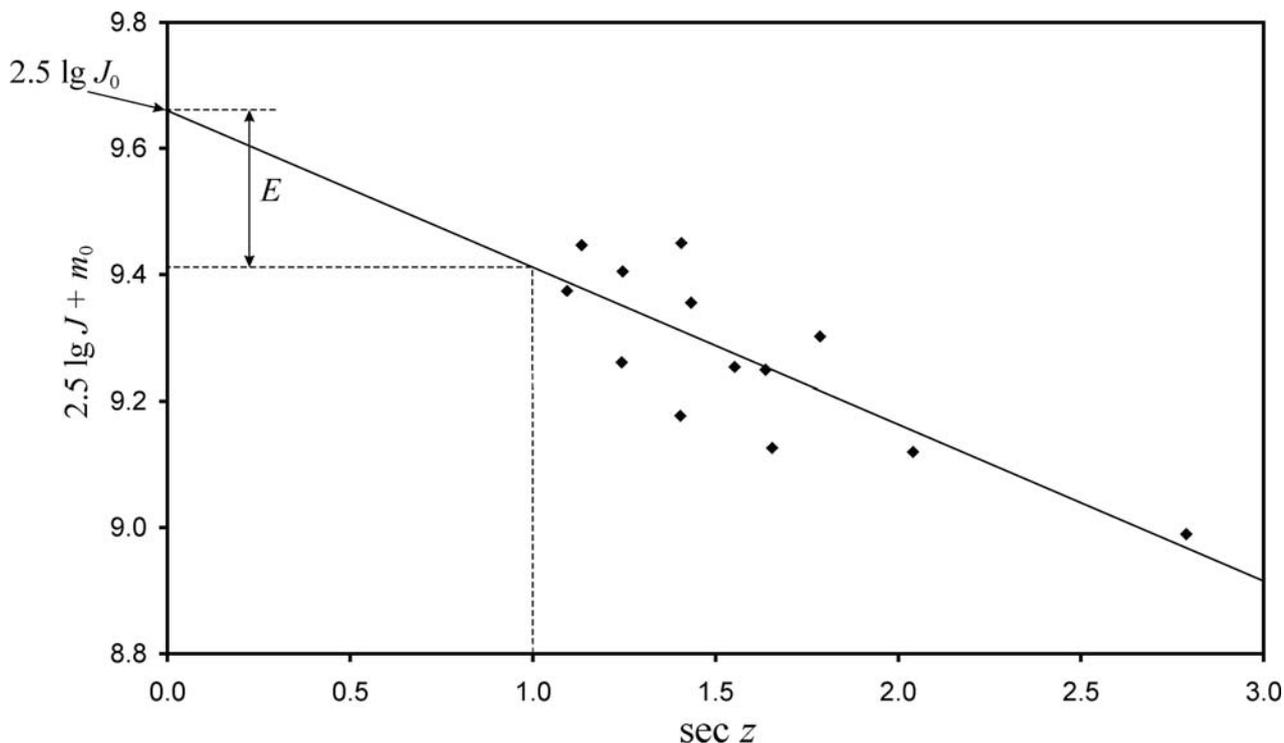
$$2.5 \lg J + m_0 = 2.5 \lg J_0 - E \sec z.$$

Оба слагаемых в левой части формулы нам известны для каждого измерения звезд. Построим диаграмму со значениями в левой части равенства по оси y , и секансом зенитного расстояния по оси x (на обороте).

Последняя формула выражает линейную связь между параметрами, отложенными по осям диаграммы. Реальные точки не лежат на прямой линии вследствие погрешностей измерения яркости. Однако мы можем провести прямую, наилучшим образом согласующуюся с экспериментальными точками. Эта прямая также показана на рисунке. Точка ее пересечения с осью ординат соответствует вели-

№ кадра	Объект	Зенитное расст., °	Яркость
1	Вега	45.75	5373
1	Денеб	23.86	1777
1	Капелла	55.94	4885
1	Юпитер	70.92	34167
2	Вега	49.89	4892
2	Денеб	28.04	1900
2	Капелла	52.33	4653
2	Юпитер	66.76	34271
2	Альдебаран	68.98	1802
3	Денеб	36.43	1601
3	Капелла	44.67	5598
3	Юпитер	58.36	37128
3	Альдебаран	60.65	2032
4	Денеб	44.57	1482
4	Капелла	36.60	5369
4	Юпитер	50.25	40194
4	Альдебаран	52.82	2044
4	Венера	70.95	189588

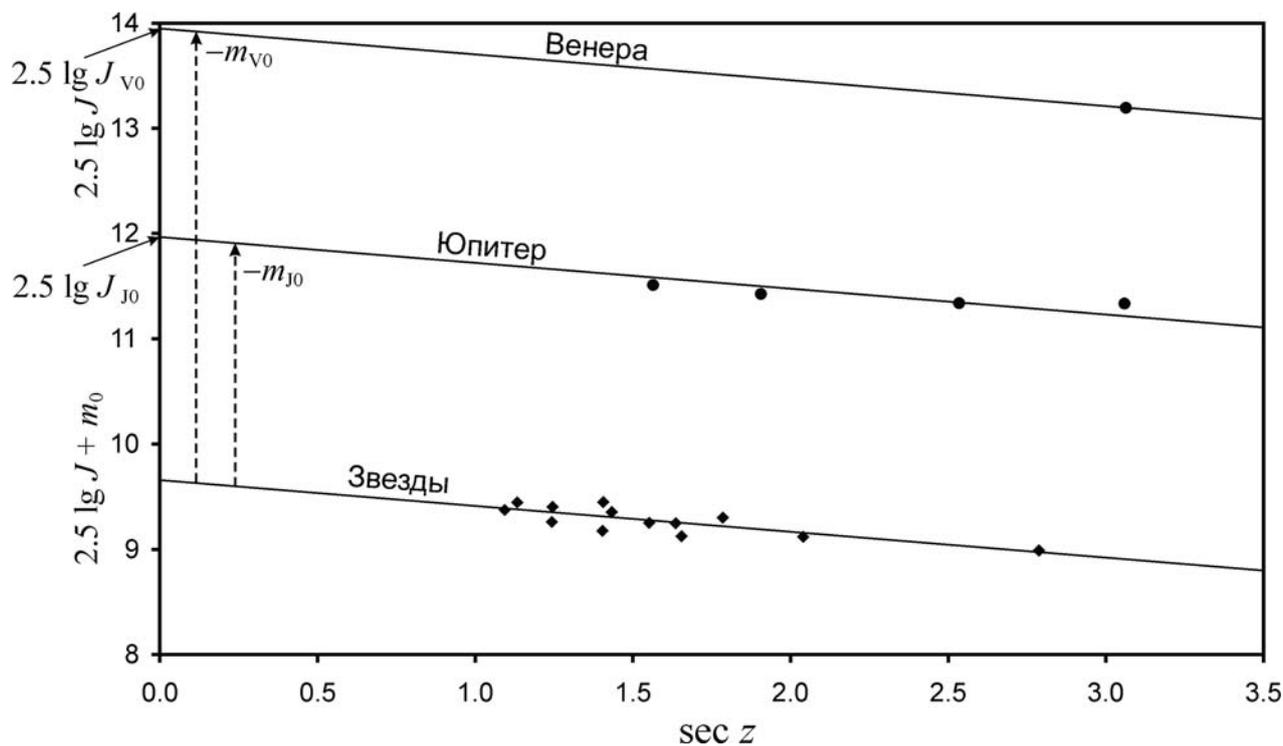
Объект	Зв. величина (V)
Вега	+0.03
Денеб	+1.25
Капелла	+0.08
Альдебаран	+0.85



чине $2.5 \lg J_0$. Она составляет 9.66, отсюда яркость звезды 0^m при отсутствии атмосферного поглощения J_0 равна 7300.

Атмосферное поглощение E с точностью до знака есть коэффициент наклона прямой или разница ее ординат, соответствующих значениям абсцисс 0 и 1. Эта величина составляет 0.25^m .

Чтобы определить звездные величины Венеры и Юпитера, нанесем их значения $2.5 \lg J$ на ту же диаграмму. Так как блеск Венеры и Юпитера также ослаблен атмосферой, для их измеренных яркостей $J_{J,V}$ также справедливо соотношение:



$$-2.5 \lg (J_{J,V} / J_0) - m_{J_0,V_0} = E \sec z.$$

Здесь m_{J_0,V_0} – внеатмосферная звездная величина Юпитера или Венеры. Это можно переписать как

$$2.5 \lg J_{J,V} = 2.5 \lg J_0 - m_{J_0,V_0} - E \sec z.$$

Данное соотношение на графике выражается прямыми линиями, параллельными той, что была проведена для звезд. Определяем по графику координаты пересечения этих линий с осью ординат ($2.5 \lg J_{J_0,V_0}$), находим звездные величины планет:

$$m_{J_0,V_0} = 2.5 \lg J_0 - 2.5 \lg J_{J_0,V_0}.$$

На графике это соответствует вертикальному сдвигу между прямыми (с обратным знаком). Звездные величины Юпитера и Венеры получаются равными -2.3^m и -4.3^m соответственно, что с точностью лучше 0.1^m совпадает с их истинными величинами в день наблюдений.

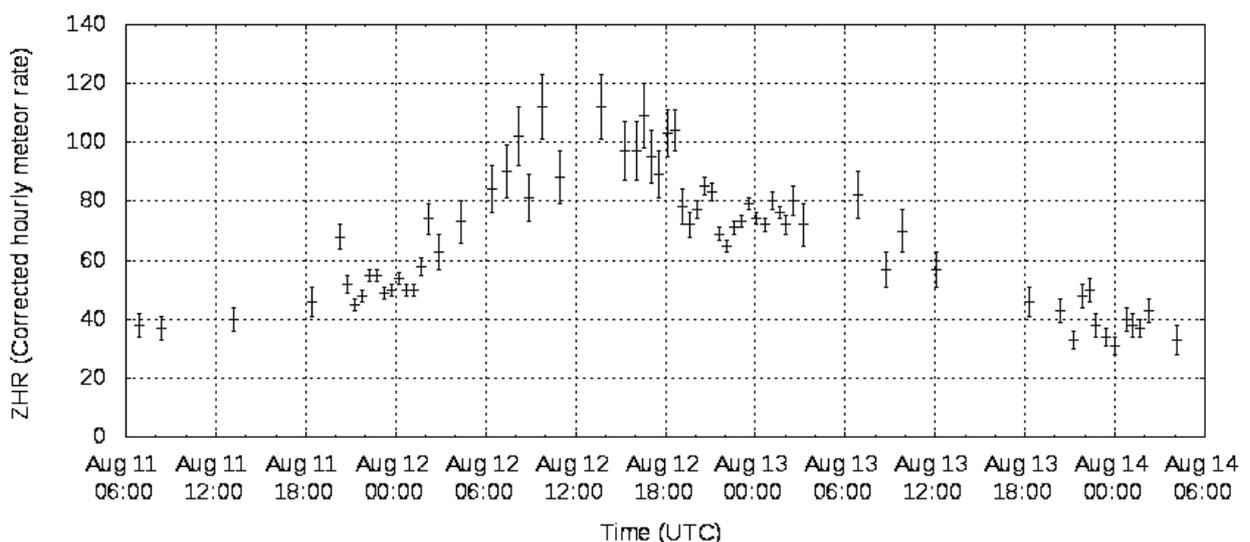
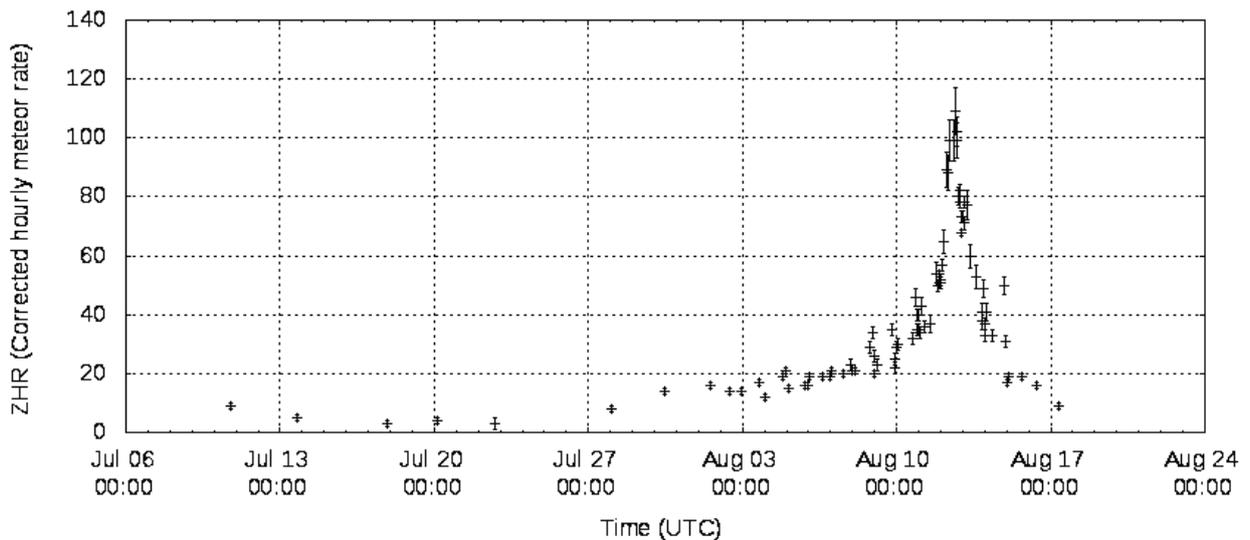
XI. 3 МЕТЕОРНЫЙ РОЙ

О.С. Угольников

? На графиках (см. оборот) приведена зависимость зенитного часового числа (ZHR) метеоров потока Персеиды от времени для периода активности этого потока в 2013 году. Данная величина есть число метеоров ярче 6.5^m , которое мог бы увидеть наблюдатель за один час на всей полусфере безлунного неба при радианте потока, расположенном в зените, без атмосферного поглощения. Второй график более подробно раскрывает ход зависимости ZHR вблизи максимума (12 августа).

Исходя из графиков, оцените, сколько метеорных частиц Персеид, вызывающих метеоры ярче 6.5^m в зените, попало в атмосферу Земли в 2013 году. Высоту метеоров считать равной 100 км. Считать, что число метеоров ярче величины m в некоторой области неба в $\sqrt{2.512}$ (или 1.6) раз больше числа метеоров ярче величины $(m-1)$ в той же области неба за то же время. Атмосферной рефракцией пренебречь.

! Для решения задачи нам нужно установить связь между величиной ZHR , приведенной на графиках, с соответствующим потоком метеорных частиц F , движущихся к Земле (в $\text{км}^{-2} \text{ час}^{-1}$) и яркостью сгорания J_0 , соответствующей метеору блеском ярче 6.5^m в зените. В общем виде решить эту задачу довольно сложно, однако можно получить достаточно точную оценку без больших математических выкладок. Обратим внимание, что параметр ZHR вычисляется для радианта, расположенного в зените, и учитывает метеоры, летящие по всему небу, без учета атмосферного ослабления, даже вблизи горизонта. Кроме этого, число метеоров хоть и растет со звездной величиной, но достаточно медленно. В этом случае основной вклад в параметр ZHR , как это ни странно, будут вносить метеоры, летящие далеко от точки наблюдения и видимые низко над горизонтом. Покажем это.



Изобразим на рисунке (справа) поверхность Земли и ее атмосферу, в которой задерживаются метеоры. В пренебрежении рефракцией определим максимальное расстояние L между точкой наблюдения и самой дальней траекторией метеора, который можно увидеть:

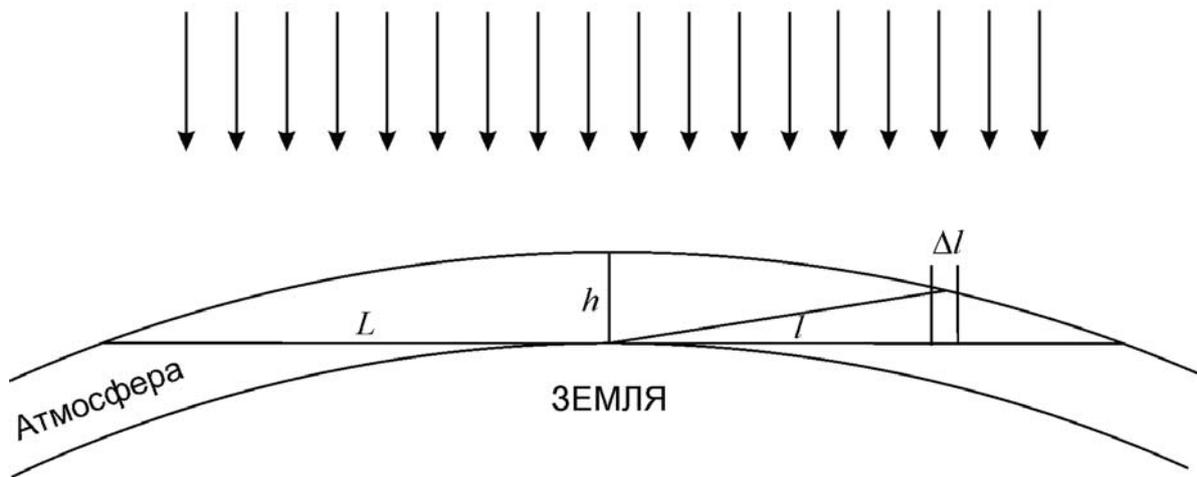
$$L = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} \approx \sqrt{2Rh} = 1130 \text{ км.}$$

Это значительно больше высоты сгорания метеоров h . Рассмотрим некоторое «прицельное расстояние» l , существенно превышающее h . Определим количество метеорных тел, которое пройдет через кольцо радиусом l и толщиной Δl за единицу времени:

$$N_{l0} = 2\pi F l \Delta l.$$

Все эти тела дали бы видимые явления метеоров, находишь они над наблюдателем, на расстоянии h от него. Однако, они существенно дальше. Расстояние до метеора можно считать равным l . Необходимую звездную величину 6.5^m будут иметь только те метеоры, чья реальная яркость превзойдет

$$J_l = J_0 \frac{l^2 + h^2}{h^2} \approx J_0 \frac{l^2}{h^2}.$$



Чтобы определить количество таких метеоров, учтем, что при одинаковых условиях наблюдения их число ярче величины m в некоторой точке неба в $\sqrt{2.512}$ (или 1.6) раз больше числа метеоров ярче величины $(m-1)$. Другими словами, число метеоров с яркостью более J_l пропорционально $J_l^{-1/2}$. Тогда число видимых метеоров на расстоянии l будет равно

$$N_l = N_{10} \sqrt{\frac{J_0}{J_l}} = N_{10} \frac{h}{l} = 2\pi Fh \Delta l.$$

Мы видим одно интересное свойство, которое облегчит дальнейшие расчеты: число метеоров не зависит от расстояния l . В реальности это свойство нарушается при малых l и большой высоте метеоров над горизонтом. Там расстояние до метеоров больше, чем l , величина N_l несколько меньше. Но ввиду малости вклада этих метеоров в общий поток это можно не принимать во внимание. Суммируя вклад всех «колец» вплоть до расстояния L , получаем выражение для ZHR :

$$ZHR = \sum_l N_l = 2\pi \cdot FhL.$$

Отметим, что учет ослабления метеоров на больших расстояниях был необходим: без него для ZHR получилось бы простое выражение πFL^2 , переоценивающее его в 5 с лишним раз. Вычислим теперь полное число метеорных тел с яркостью сгорания выше J_0 , попадающих в земную атмосферу за один час:

$$N_H = \pi R^2 F = ZHR \frac{R^2}{2hL} = ZHR \cdot \left(\frac{R}{2h}\right)^{3/2}.$$

Получается, что для обеспечения зенитного часового числа ZHR , равного единице, в атмосферу ежечасно должно вторгаться 180 потенциально видимых глазом метеорных тел. Теперь нам нужно вычислить полное зенитное число потока (ZR), соответствующее площади под кривой, отображающей зависимость ZHR от времени. При этом нужно учесть, что малые отметки по оси абсцисс первого графика отстоят друг от друга на один день, а величины ZHR рассчитываются на один час. Число ZR получается равным 13000, и это означает, что в земную атмосферу в 2013 году попало 2.3 миллиона метеорных частиц потока Персеиды с размером, достаточным для наблюдений невооруженным глазом.